

2018年天津河西区理科高三二模数学试卷

一、选择题（每题5分，共40分）

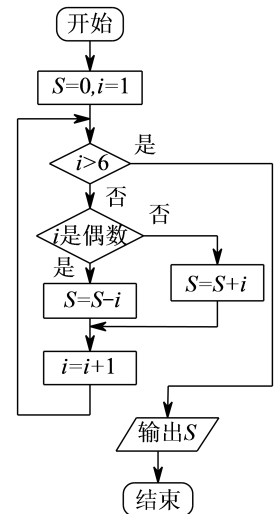
1. 已知全集 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，集合 $A = \{4, 5, 7\}$ ， $B = \{4, 6\}$ ，则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$.

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{2\}$ C. $\{2, 5\}$ D. $\{5, 7\}$

2. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} 3x - y - 2 \leq 0 \\ 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ 2x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 3x + y$ 的最大值为 $(\quad)$.

- A. 12 B. 24 C. 28 D. 20

3. 如图所示的程序框图，运行相应的程序，输出的 S 值为 $(\quad)$.



- A. 3 B. -3 C. 2 D. -2

4. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则 “ $|x| + |x - 2| < 4$ ” 是 “ $x^2 - x - 6 < 0$ ” 的 $(\quad)$.

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对于定义域内任意的 x 均满足 $f(x+4) = f(x)$ ，当 $x \in (0, 2)$ 时， $f(x) = 2e^x$ (e 为自然对数的底数)，则

$$f\left(\ln \frac{e^4}{4}\right) = (\quad) .$$

- A. -8 B. 8 C. -4 D. 4

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 在双曲线的右支上，若 $|PF_1| - |PF_2| = 2$ ，且双曲线的一条渐近线与直线 $x + 2y + 1 = 0$ 垂直，则双曲线的方程为 $(\quad)$.

- A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $x^2 - 4y^2 = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $4x^2 - y^2 = 1$

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列，把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象. 关于函数 $g(x)$ ，现有如下命题：

①在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数；

②其图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称；

③函数 $g(x)$ 是奇函数；

④当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi\right]$ 时，函数 $g(x)$ 的值域是 $[-2, 1]$ ．

其中真命题的个数是（ ）．

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

8. 已知函数 $f(x) + 2 = \frac{2}{f(\sqrt{x+1})}$ ，当 $x \in (0, 1]$ 时， $f(x) = x^2$ ，若在区间 $(-1, 1]$ 内， $g(x) = f(x) - t(x+1)$ 有两个不同的零点，则实数 t 的取值范围是（ ）．

A. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

二、填空题（每题5分，共30分）

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ， i 为虚数单位，若 $3 + 4i = \frac{2 - bi}{a + i}$ ，则 $a + b =$ _____．

10. 已知正实数 x, y 满足 $x + \frac{y}{4} = 1$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} - 2\sqrt{xy}$ 的最小值为_____．

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为8，面 $A_1B_1C_1D_1$ 在一个半球的底面上， A, B, C, D 四个顶点都在此半球的球面上，则此半球的体积为_____．

12. 设抛物线 $C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}$ （ t 为参数）的焦点为 F ，曲线 $\begin{cases} x = s \\ y = \frac{k}{s} \end{cases}$ （ s 为参数， $k > 0$ ）与 C 交于点 P ， $PF \perp x$ 轴，则 $k =$ _____．

13. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $|\overrightarrow{AC}| = 2$ ，点 D 在边 AB 上，点 E 在边 BC 上， $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ，若 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{8}{3}$ ，则 $|\overrightarrow{AB}| =$ _____．

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & (x \geq 0) \\ (a-2)e^x & (x < 0) \end{cases}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，且 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ ，使得 $e^{x_0} - ax_0 < 0$ ，则实数 a 的取值范围是_____．

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $A = \frac{\pi}{4}$ ， $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$ ．

（1）求 $\tan C$ 的值．

（2）求 $\tan\left(2C - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值．

16. 在对某渔业产品的质量调查中，从甲、乙两地出产的产品中各随机抽取10件，测量该产品中某种元素的含量（单位：毫克）．下表是测量数据的茎叶图：

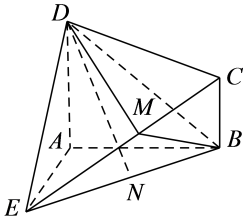
甲地						乙地				
				8	0					
3	4	6	8	1	2	4	7	8	8	8
0	2	4	5	6	2	0	0	1	2	

规定：当产品中的此种元素含量大于等于15毫克时为优质品．

（1）试用上述样本数据估计甲、乙两地该产品的优质品率（优质品件数/总件数）．

（2）从乙地抽出的上述10件产品中，随机抽取3件，记抽到的3件产品中优质品数为 X ，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

17. 如图所示的几何体 $ABCDE$ 中, $DA \perp EAB$, $AB = AD = AE = 2BC = 2$, $CB \parallel DA$, $EA \perp AB$, M 是 EC 上的点 (不与端点重合), F 为 AD 上的点, N 为 BE 的中点.



- (1) 若 M 为 CE 的中点, $AF = 3FD$.
- ① 求证: $FN \parallel$ 平面 MBD .
- ② 求点 F 到平面 MBD 的距离.
- (2) 若平面 MBD 与平面 ABD 所成角 (锐角) 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 试确定点 M 在 EC 上的位置.

18. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $n \geq 2$ 时, 满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$, 且 $a_1 = 1$.

(1) 求证: 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列.

(2) 设 $b_n = \left(\log_4 \frac{a_{n+1}}{3}\right) \cdot S_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $n \geq 2$ 时, 满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$, 且 $a_1 = 1$.

(1) 求证: 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列.

(2) 设 $b_n = \left(\log_4 \frac{a_{n+1}}{3}\right) \cdot S_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 其一个焦点在抛物线 $C_2: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线上, 且抛物线 C_2 与直线 $l: x - y + \sqrt{6} = 0$ 相切.

(1) 求椭圆 C_1 的方程.

(2) 若点 M, N 为椭圆 C_1 上的两个不同的点, T 为平面内任意一点, 满足: $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, 直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 试说明: 是否存在两个定点 F_1, F_2 , 使得 $|TF_1| + |TF_2|$ 为定值? 若存在, 求点 F_1, F_2 的坐标; 若不存在, 则说明理由.